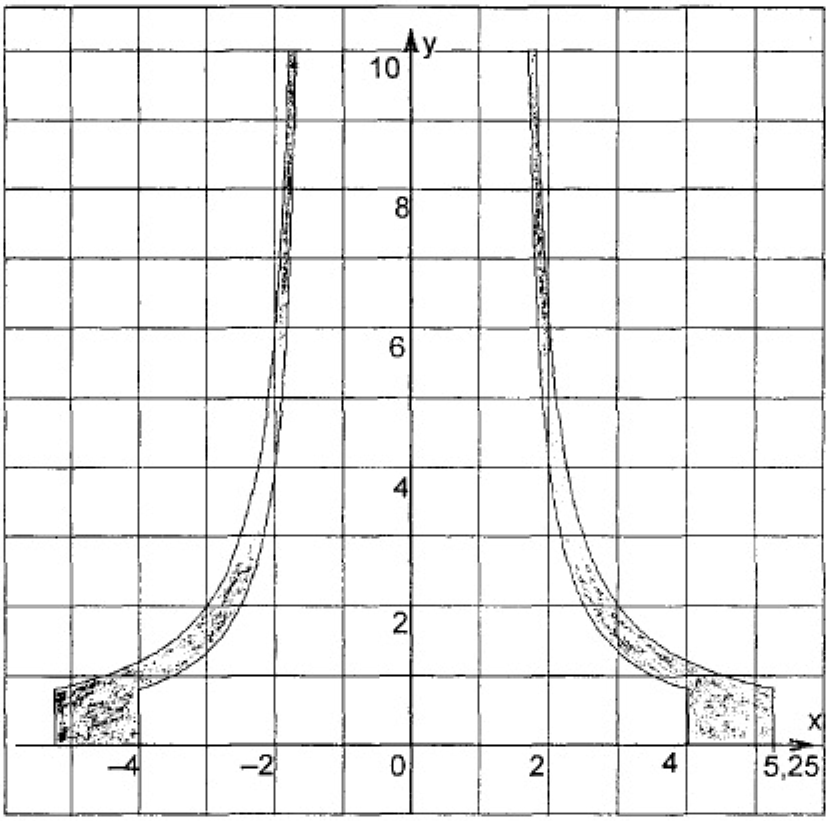
Ein drehsymmetrischer Kühlturm ist 100 m hoch. Die Skizze zeigt einen vertikalen Schnitt längs der Rotationsachse (Maßangaben in 10 m).

Im ersten Feld wird die krummlinige Begrenzung der Schnittfläche im Innern des Turms beschrieben durch das Schaubild K einer Funktion f mit

$f(x) = \frac{4}{bx - c};\ x \in D_f$.

K verläuft durch den Punkt $P(2\,|\,4)$ und endet in $Q(4\,|\,0{,}8)$.



a) Bestimmen Sie f(x).
Welchen Innendurchmesser hat der Turm in 100 m Höhe?
Im Punkt Q hat die innere Begrenzung einen Knick.
Bestimmen Sie den zugehörigen Winkel.

(Teilergebnis: $f(x) = \frac{4}{2x - 3}$) (9 VP)

b) Die äußere krummlinige Begrenzung der Schnittfläche im ersten Feld wird durch die Funktion g mit $g(x) = \frac{6}{2x - 3};\ 1{,}8 \le x \le 5{,}25$ beschrieben.
Berechnen Sie den Inhalt der Schnittfläche der Kühlturmwand (vgl. schattierte Fläche in der Skizze).

(9 VP)

c) Geben Sie eine Gleichung der Kurve C an, die man durch Spiegelung von K an der y-Achse erhält.
An der Turminnenwand soll eine kreisförmige Schiene horizontal angebracht werden. Auf dieser Schiene soll eine Kamera fahren, die auf ihrem Rundweg jeden Punkt des Turmbodens erfassen kann. Die Schiene soll möglichst hoch angebracht werden.
Bestimmen Sie diese Höhe.

(12 VP)

Gegeben ist die Funktion f durch

$$f(x) = 20\,e^{-x} \cdot \sin x\ ;\ \ x \geq 0.$$

Ihr Schaubild sei K.

a) Untersuchen Sie K im Intervall $[\,0\,;\,2\pi\,]$ auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse und Extrempunkte.
Zeichnen Sie K in diesem Intervall.

(9 VP)

b) Bestimmen Sie $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass die Funktion F mit $F(x) = 20\,e^{-x} \cdot (a \sin x + b \cos x)\ ;\ \ x \geq 0$ eine Stammfunktion von f ist.
K schließt im Intervall $[\,0\,;\,2\pi\,]$ mit der x-Achse zwei Flächenstücke ein.
Berechnen Sie das Verhältnis der Inhalte dieser Flächenstücke; geben Sie dieses Verhältnis als Potenz von e an.

(7 VP)

c) Es sei t eine reelle Zahl mit $t \neq 0$.
Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für $n \geq 1$ gilt:

$$1 + e^{t} + e^{2t} + \ldots + e^{(n-1)t} = \frac{1 - e^{nt}}{1 - e^{t}}.$$

(6 VP)

d) Die Nullstellen von f sind der Größe nach geordnet: $x_1, x_2, x_3, \ldots$.
Der Inhalt der Fläche, die K zwischen der n-ten und der (n+1)-ten Nullstelle mit der x-Achse einschließt, sei A_n.
Für die Inhalte zweier aufeinanderfolgender Flächenstücke gilt: $A_{n+1} : A_n = e^{-\pi}$.
Bestimmen Sie unter Verwendung von Teilaufgabe c) den Inhalt der Gesamtfläche, die K mit der x-Achse einschließt.

(8 VP)

Für jedes $t \geq 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch

$$f_t(x) = x^2\,(t - \ln x)\,;\ x > 0.$$

Ihr Schaubild sei K_t.

a) Untersuchen Sie K_t.

Geben Sie die Grenzwerte von $f_t(x)$ und $f_t'(x)$ für x gegen 0 an.

Zeichnen Sie K_1 einschließlich der Wendetangente (Längeneinheit 4 cm).

(11 VP)

b) Die Kurve K_t und die x-Achse umschließen im 1. Feld eine Fläche.

Bestimmen Sie ihren Inhalt.

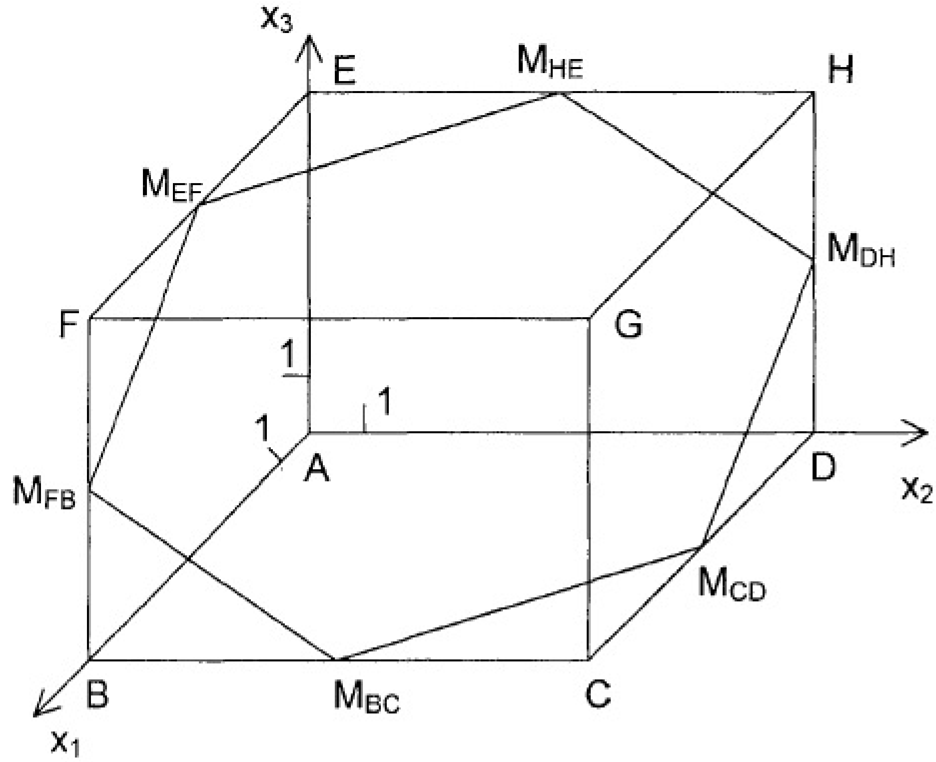
(8 VP)

c) Welche Ursprungsgerade ist Tangente an K_1?

Es gibt eine zur 1. Winkelhalbierenden parallele, aber von ihr verschiedene Gerade, die Tangente an K_1 ist.
Berechnen Sie mit dem Newton´schen Iterationsverfahren näherungsweise die Abszisse ihres Berührpunktes. (Das Verfahren ist abzubrechen, wenn sich die ersten drei Dezimalen erstmals nicht mehr ändern.)

(11 VP)

Die abgebildete quaderförmige Schachtel ist durch die Eckpunkte $A(0|0|0)$, $B(8|0|0)$, $D(0|9|0)$, $E(0|0|6)$ festgelegt.
Die Kantenmitten M_{BC}, M_{CD}, M_{DH}, M_{HE}, M_{EF} und M_{FB} sind die Eckpunkte eines Sechsecks aus Pappe, das in der Schachtel liegt.



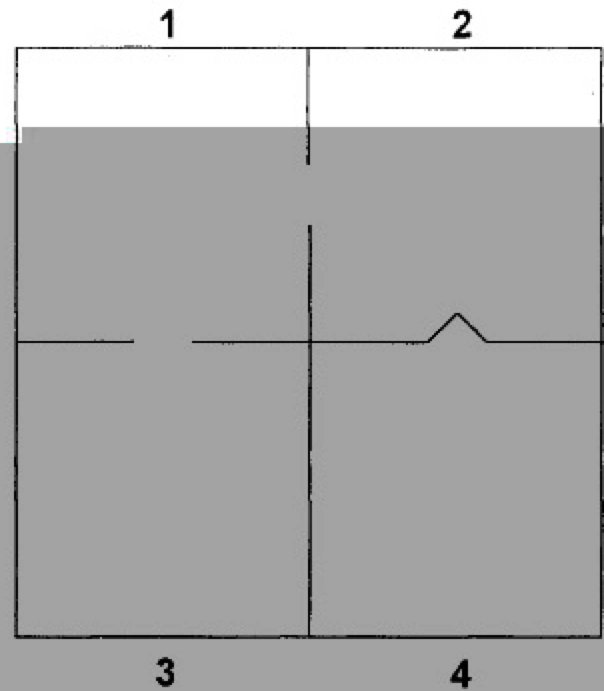
a) Zeigen Sie, dass gegenüberliegende Kanten des Sechsecks parallel und gleich lang sind.
Zeigen Sie, dass das Sechseck eben ist, und bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene, in der das Sechseck liegt.
Bestimmen Sie den Winkel zwischen dem Sechseck und dem Boden des Quaders.
(Teilergebnis: $9x_1 + 8x_2 + 1$ $2x_3 = 108$)

(9 VP)

b) Das Sechseck wird herausg enommen und ein Ball mit dem Durchmesser 6 so in die Schachtel gelegt, dass er de en Boden, die linke Wand und die hintere Wand berührt.
Zeigen Sie, dass das Sechs eck nicht mehr in seine alte Lage zu bringen ist.
Bestimmen Sie den Radius des kreisförmigen Loches, das man mindestens in das Sechs- eck schneiden müsste, damit das Sechseck wied er in seine alte Lage gebracht werden kann.
Wie groß dürfte der Ball höchstens sein, damit da s Sechseck ohne Loch in die alte Lage passte?

(12 VP)

c) In dem abgebildeten Labyrinth mit den Räumen 1, 2, 3 und 4 befinden sich Mäuse. Zwischen einigen Räumen gibt es Durchgänge. Der Durchgang zwischen Raum 4 und Raum 2 kann nur in Richtung von Raum 4 nach Raum 2 benutzt werden, nicht umgekehrt.
Im Verlauf einer Versuchsreihe wurde die Anzahl der Mäuse in den Räumen jede Minute protokolliert. Es wurde festgestellt, dass die Hälfte der Mäuse eines Raumes im Raum verbleibt. Die anderen wandern, ohne einen Durchgang zu bevorzugen, einen Raum weiter.



Stellen Sie eine Übergangsmatrix auf.
Zu einem Zeitpunkt befinden sich 16 Mäuse in Raum 1, 32 Mäuse in Raum 2, 64 Mäuse in Raum 3 und 48 Mäuse in Raum 4.
Wie verteilen sich die Mäuse nach zwei Minuten?
Bestimmen Sie den Gleichgewichtszustand im Labyrinth, wenn sich insgesamt 104 Mäuse darin befinden.

(9 VP)

Gegeben ist für jedes $a \in \mathbb{R}$ eine Gerade g_a durch

$$g_a: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4-a \\ a \\ -4 \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}.$$

a) Begründen Sie, dass alle Geraden einen Punkt P gemeinsam haben.

Zeigen Sie, dass alle Geraden g_a in einer Ebene E liegen, und geben Sie eine Gleichung von E an.

Jede Gerade g_a schneidet die x_1x_2-Ebene in einem Punkt S_a. Alle Punkte S_a liegen auf einer Geraden s.

Geben Sie eine Gleichung von s an.

Veranschaulichen Sie P, E und s in einem Koordinatensystem.

(8 VP)

b) Die Punkte A und B liegen auf der Geraden $\vec{x} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \; r \in \mathbb{R}$.

Stellen Sie die Koordinaten von A und B in Abhängigkeit von einem Parameter so dar, dass jedes Dreieck ABP mit $P(6 \mid 0 \mid 4)$ gleichschenklig mit der Basis AB ist.

Für welche A und B ist das Dreieck ABP gleichseitig?

(7 VP)

c) Die x_3-Achse und g_8 sind windschief.

Bestimmen Sie eine Gleichung der kleinsten Kugel, die sowohl g_8 als auch die x_3-Achse berührt.

(8 VP)

d) Jede Pyramide mit quadratischer Grundfläche, bei der alle 8 Kanten die Länge a haben, besitzt eine Inkugel K. Diese berührt alle Seitenflächen und die Grundfläche von innen.

Bestimmen Sie in einem geeigneten Koordinatensystem den Mittelpunkt M und den Radius r der Kugel K in Abhängigkeit von der Kantenlänge a.

(7 VP)